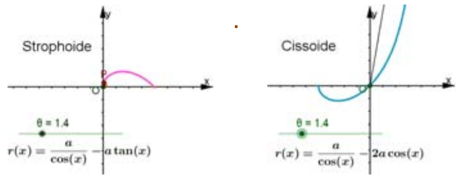
Ist das nun dieselbe Schlaufe?



Vielfältige Argumente und eigenes Erkunden von Klasse 8 bis zum 8. Semester

Beweisbedürfnis und Beweise erleben

- Sie hörten: Ausführungen zu Argumentationen und Begründungen im jungen Schulalter.
- Sie hörten: Herausarbeitung von Kernideen im Analysis-unterricht, die nach gesicherter Fundierung rufen.

Nun folgt:

- Typische **Beweisanlässe** im Unterricht zu **Kurven**,
- die die Entwicklung vielfältiger **Beweisideen** ermöglichen und damit
- in hohem Maße **Freiheiten** bieten und
- die Entwicklung **mathematischen Handwerks** fördern.

Beweisbedürfnis und Beweise erleben

- NUTZEN für: Klasse 8 bis 8. Semester ?!

?!?!?!?!?

Wie man das verstehen soll, ergibt sich unterwegs

Kurven erkunden und verstehen

- Mein Buch ist in Arbeit!

ab Winter 2016/17

Auf der Kurven-Website finden Sie diesen Vortrag und die interaktiven Dateien

Bis dahin

und Bereich Kurven

www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Schlaufenvielfalt

Strophoide = Schlaufe 1 **Seilkurve**
geometrische Definition
Polargleichung
Verstehen der polar-kartesische Koppelung

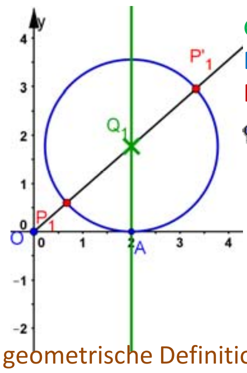
$= \ ? \ \neq$ **Wann sind zwei Kurven gleich?** $= \ ? \ \neq$

Schlaufe 2 mit Polargleichung aus der Animation
Unterschied verstandenen, nichts ist bewiesen

Schlaufe 3 Logozyklika Schlaufe 4 Rasterschlaufe
Schlaufe 5 Trisektrix Schlaufe 6 Konchoide
Schlaufe 7 Cissoide $= \ ? \ \neq$

Wie kann man hier Vermutungen beweisen?

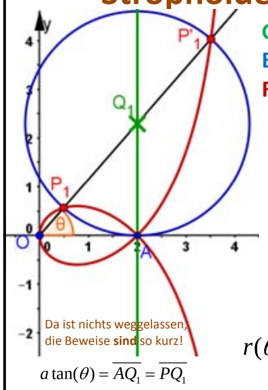
Strophoide Original Definition



Grün: Beweglich, Q auf Weg
Blau: geometrische Elemente
Rot: Ergebnis Ortskurve

geometrische Definition

Strophoide Polargleichung



Grün: Beweglich, Q=(u,v) auf Weg
Blau: geometrische Elemente
Rot: P=(x,y), Ergebnis Ortskurve

Asymptote?
Sichere Punkte?

Polargleichung für den Weg

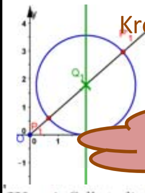
$$\rho = \frac{a}{\cos(\theta)}$$

Polargleichung Strophoide

$$r(\theta) = \rho - \overline{PQ_1} = \frac{a}{\cos(\theta)} - a\tan(\theta)$$

$a\tan(\theta) = \overline{AQ_1} = \overline{PQ_1}$

Strophoide kartesische Gleichung



Kreis um Q enthält P $(x-a)^2 + (y-v)^2 = v^2$

Strahlensatz $\frac{v}{a} = \frac{y}{x}$, v eliminieren, fertig!

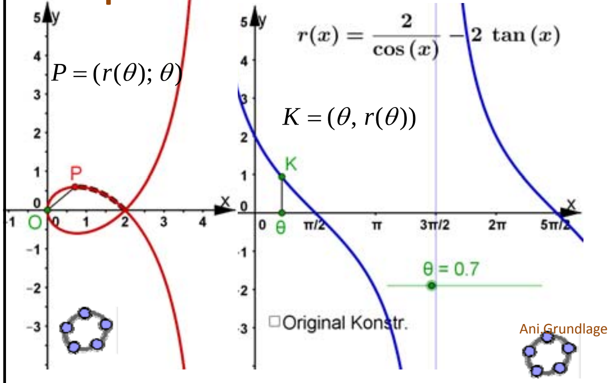
Beweisen-Lernen braucht hilfreiche Strukturen

Weg 1 Selbst eliminieren: $(x-a)^2 + (y - \frac{ya}{x})^2 = (\frac{ya}{x})^2$ ergibt $x^2(x-a)^2 + (yx - ya)^2 = y^2a^2$, dann $(x^2+y^2)(x-a)^2 = a^2y^2$. Dieses ist eine algebraische Gleichung 4. Grades.

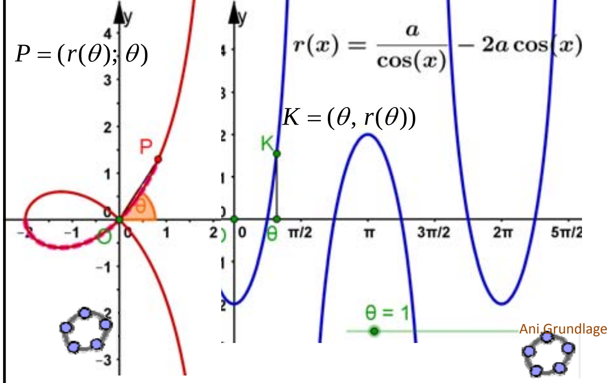
Weg 2 Anders zusammenfassen: $x^2(x-a)^2 + y^2(x^2 - 2ax + a^2) = y^2a^2$ ergibt $x^2(x-a)^2 + xy^2(x-2a) = 0$, Division durch x, da $x \neq 0$, hat zur Folge $x(x-a)^2 = y^2(2a-x)$, Gleichung 3. Grades, etwa so in Büchern.

Weg 3 Mit Eliminate und Simplify, siehe Abschnitt 1.1.4.2 oder Abschnitt ??, ent $x(a^2 + x^2 + y^2) = 2a(x^2 + y^2)$.

Strophoide Polar-kartesische Sicht



Schlaufe 2 Polar-kartesische Sicht



Schlaufe 1 $=$? $\neq$ Schlaufe 2

Verstanden, warum der Durchlauf **verschieden** ist!

Aber was heißt **Gleichheit** bei Kurven?

Zwei Kurven sind von gleichen Typ, wenn sie als geometrische Punktmengen kongruent oder ähnlich (i.e.S) sind.

Um dieses nachzuweisen, bringt man sie **in gleiche Lage und Größe**. Sei C1 die bekannte Kurve und C2 die „neue" Kurve.

Wir stellen uns vor, man habe die neue Kurve C2 mit einer geometrischen Konstruktion gefunden.

Dazu folgen bald mehrere Beispiele!

Schlaufe 1 $=$? $\neq$ Schlaufe 2

Weg 1 **Eine Gleichung** von C1 in der **Geometrie** von C2 eintragen. Wenn's nicht passt, ist entschieden: Die Kurven sind ungleich. Anderenfalls: **Weg 2, 3, 4, 5**

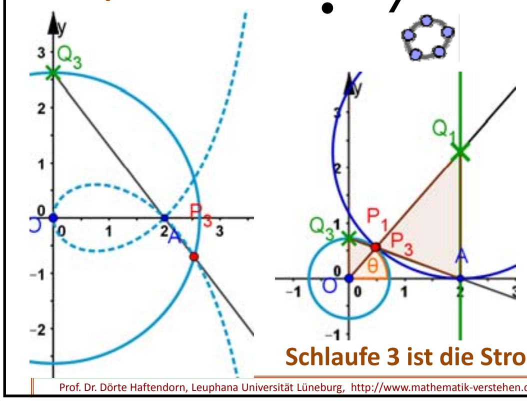
Weg 2 **Geometrie** von C1 in **Geometrie** von C2 finden, geometrisch beweisen: P aus C2 ist ein P von C1.

Weg 3 Für C2 **kartesische Gleichung** aufstellen und nach algebraischer Umformung suchen, die die **kartesische Gleichung** von C1 ergibt.

Weg 4 Wie Weg 3, aber für die **Polargleichung**. Vorsicht! Trigonometrische Funktion sind „vielgestaltig".

Weg 5 Spezifische Überlegungen mit der gegenseitigen Lage wichtiger Elemente wie sicheren Punkten, Asymptoten, wichtigen Winkeln u.s.w.

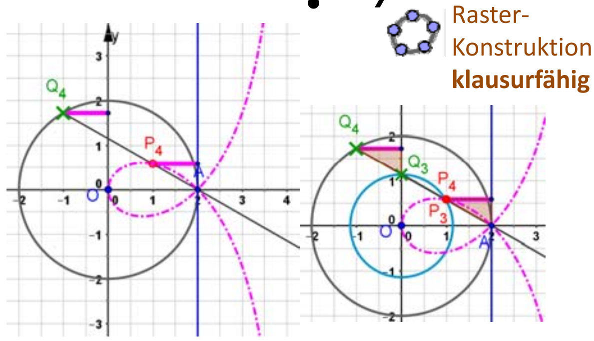
Strophoide = ? ≠ Schlaufe 3



Schlaufe 3 ist die Strophoide

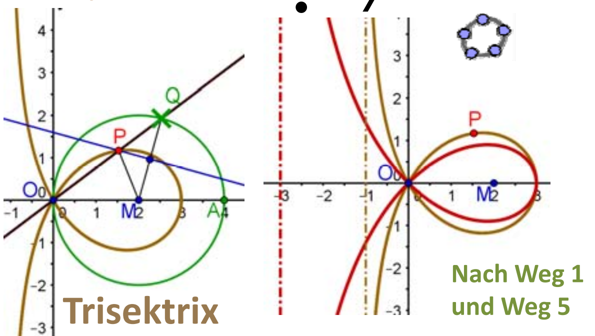
Strophoide = ? ≠ Schlaufe 4

Raster-
Konstruktion
klausurfähig



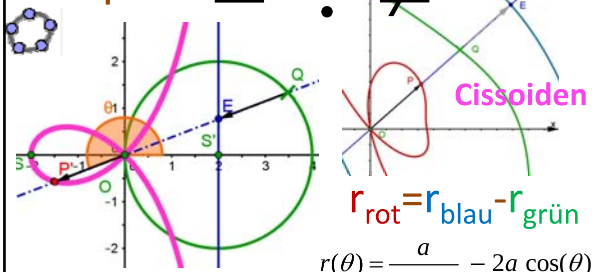
Schlaufe 4 ist die Strophoide

Strophoide = ? ≠ Schlaufe 5



Schlaufe 5 ist keine Strophoide

Strophoide = ? ≠ Schlaufe 2



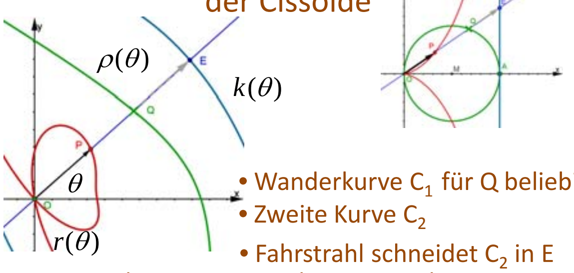
$r_{rot} = r_{blau} - r_{grün}$

$$r(\theta) = \frac{a}{\cos(\theta)} - 2a\cos(\theta)$$

und diese Polargleichung passt zu $(a-x)y^2 = (a+x)x^2$ der verschobenen Strophoide

Die Strophoide ist eine spezielle Cissoide.

Allgemeine geometrische Konstruktion der Cissoide



- Wanderkurve C_1 für Q beliebig
- Zweite Kurve C_2
- Fahrstrahl schneidet C_2 in E
- Vektor QE an O anhängen ergibt P

$$r(\theta) = k(\theta) - \rho(\theta)$$

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Strophoide verschieben

$x(x-a)^2 = y^2(2a-x)$

$x \to x+a$

$(x+a)(x+a-a)^2 = y^2(2a-x-a)$

$(x+a)(x^2) = y^2(a-x)$

Polargleichung der Strophoide in verschobener Lage

$(a-x)\,y^2 = (a+x)\,x^2 \qquad c=\cos(\theta)$

$(a-rc)\,r^2s^2 = (a+rc)\,r^2c^2 \;\big|:r^2 \qquad s=\sin(\theta)$

$a s^2 - a c^2 = r c s^2 + r c c^2$

$a(1-c^2-c^2) = r c$

$a(1-2c^2) = r c$

$r(\theta) = \dfrac{a}{\cos\theta} - 2a\cos\theta$

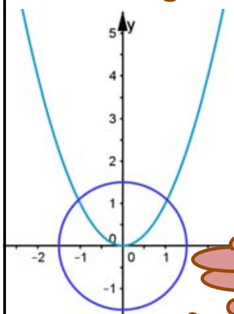
Schlaufenvielfalt gebändigt!

Unsere Grundlage war die gewöhnliche Strophoide
= Schlaufe 1 **Seilkurve**
Die allgemeinen **Cissoiden** sind eine große Kurvenklasse.
Die gewöhnliche Strophoide ist eine spezielle Cissoide. Erkenntnis zu Schlaufe 2 $=$!

Schlaufe 3 Logozyklika $=$!
Schlaufe 4 Rasterschlaufe $=$!
Das waren einfache alternative Konstruktionen

Schlaufe 5 Trisektrix $\neq$! , sie ist keine Strophoide
Aber sie ist auch eine spezielle Cissoide

Kurvengleichung F(x,y)=0 und 3D



$(y-x^2-a)(x^2+y^2-r^2)=0$

Der Graph der Produktkurve ist die Vereinigung der Punkte der Faktorkurven.

$(y-x^2-a)(x^2+y^2-r^2)=h$

Wenn hier keine 0 steht?

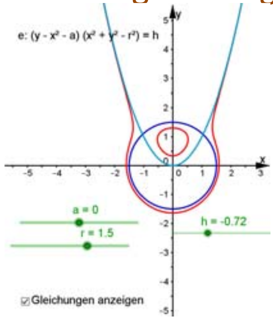
Dann hilft die 3D-Darstellung beim Verstehen

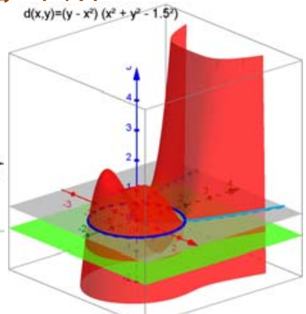
produkt-ohne3D

$z = f(x,y) = (y-x^2-a)(x^2+y^2-r^2)=0$

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Kurvengleichung F(x,y)=0 und 3D

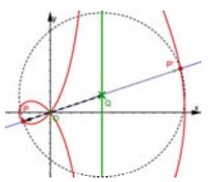




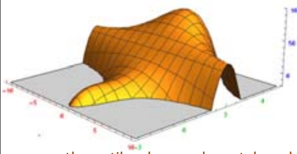
produkt3D Mit zwei Fenstern in GeoGebra!

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

3D-Darstellungen anderer Kurven



Konchoide

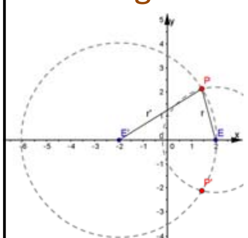


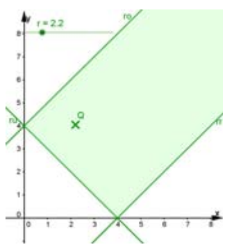
Durch Schnitte in anderer Höhe bilden sich Kurvenfamilien.

Doch manchmal kommt es anders als man denkt.

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Allgemeine bipolare Kurven





Visualisierung der Dreiecks-bedingung im zweiten Grafikfenster in GeoGebra. **gekoppelte Darstellung**

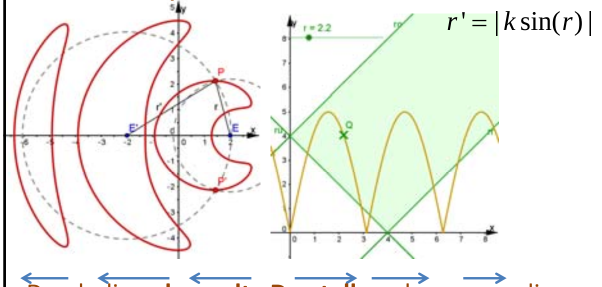
bipolar-bereich-start-fkt

Ein Punkt P habe die Abstände r und r' von zwei „Brennpunkten" E und E' im Abstand 2e. **Jede Gleichung** von r und r' **definiert eine bipolare Kurve** als Menge aller Punkte, die sowohl die Gleichung erfüllen, als auch mit E und E' eine Dreieck bilden.

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Bipolare Sinus-Kurven

$r' = |k \sin(r)|$



Durch die **gekoppelte Darstellung** kann man die Besonderheiten alle verstehen.

bipolar-bereich-start-fkt

Kurven, alles ist mit allem verwoben

Wie führt man Kurven ein?	Wo sind Freiheiten zum Erkunden?	Was heißt „verstehen“ ?
Wie ermöglicht man Eigentätigkeit?	Welche Bezüge gibt es unter den Kurven?	Welche Werk-zeuge sind hilfreich?

Meine Bücher

2. Aufl. Herbst 2015

Dieses Buch war für „alle“, Vorlesung für alle unsere Erstis, 1500 Studierende aller Fächer.
600 farbige Bilder
Zumeist mit GeoGebra

Mein neues Buch „Kurven erkunden und verstehen“ soll die Lehrerausbildung in Mathematik bereichern. Es soll auch für Lehrer sein, die mehr „nahrhaftes Futter“ für ihre Schüler brauchen.

DENN

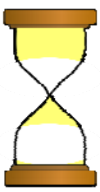
Diagnose

Die Mathematiklehre leidet an **akuter Magersucht.**

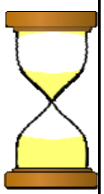
Die Mathematiklehre ist schon so schlapp und kraftlos geworden, dass sie die jungen Menschen nicht durch‘s Studium tragen kann.

Wege zur Heilung

- Verleugnen wir nicht die Kraft der Mathematik, die in der **Verlässlichkeit bewiesener Aussagen** liegt.
- Wie müssen eine **vielfältige** Mathematik ermöglichen, in der Lernende **selbst** etwas vermuten und behaupten
- und dann lernen, **mathematisch zu argumentieren.**

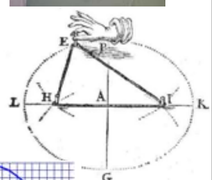


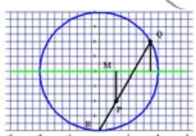
Haben wir Zeit, noch einmal in den Wundersack zu greifen?



Weiteres

- weitere Didaktik
- allgemeine Definitionen
- Gelenke und Handlung
- Rasterkonstruktionen
- 2D-Raum





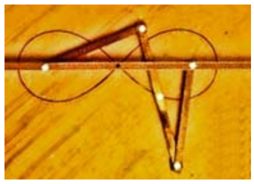
Weitere Didaktik

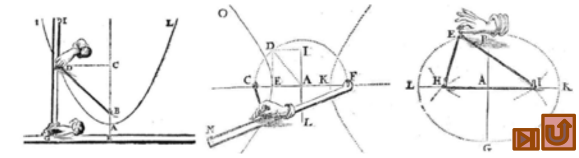
Reichhaltig in Hans Schupp, Heinz Dabrock
Höhere Kurven 1995, nur Bib.

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-verstehen.de Folie 31

Starten mit Handeln

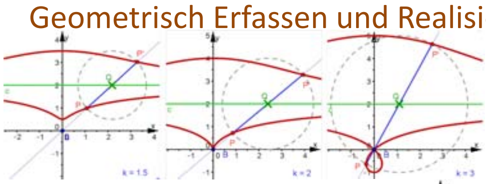




www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

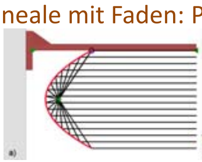
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-verstehen.de Folie 32

Geometrisch Erfassen und Realisieren

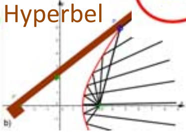


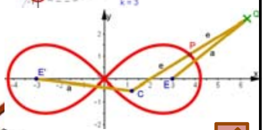
Konchoide des Nikomedes

Lineale mit Faden: Parabel



Hyperbel



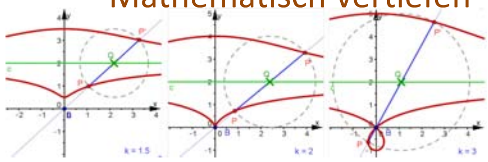


Bernoulli'sche Lemniskate

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-verstehen.de Folie 33

Mathematisch vertiefen



Für die Jüngsten: Konchoide des Nikomedes

- Alle Erscheinungsformen finden.
- Überlegen und experimentieren, wovon die Form abhängt.
- Überlegen, ob der „Wanderweg von Q" geschnitten werden kann.
- Ausprobieren und entscheiden, welche der folgenden Gleichungen stimmen kann:

Aufgabe 3.1 Visuelles Prüfen von Termumformungen

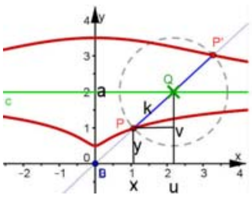
Prüfen Sie durch Zeichnung in GeoGebra und durch Rechnung: Welche der folgenden Gleichungen ist eine richtige Umformung dieser Hundekurven-Gleichung?

$$(x^2+y^2)\cdot(y-a)^2=k^2y^2$$

a) $(x+y)^2\cdot(y-a)^2=k^2y^2$ b) $(x^2+y^2)\cdot(y^2-a^2)=k^2y^2$
c) $x^2(y-a)^2=y^2(k^2-(y-a)^2)$ d) $(k+y-a)(k-y+a)y^2=(x\cdot(y-a))^2$
e) $x^2y^2=(y+a)^2(k^2-y^2)$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-verstehen.de Folie 34

Mit Pythagoras und Strahlensatz



Konchoide des Nikomedes

Einhaltung von Bezeichnungsstandards

$Q=(u,v)$ **X in grün**

$P=(x,y)$ **in rot**

Kreise zum Übertragen von Abständen grau gestrichelt

Gleichung 1: Weg von Q $v=a,\quad u$ frei

Gleichung 2: Ort 1 von P $(u-x)^2+(v-y)^2=k^2$

Gleichung 3: Ort 2 von P $\dfrac{y}{x}=\dfrac{v}{u}$

Also: $\left(\frac{a\,x}{y}-x\right)^2+(a-y)^2=k^2$

$$(x^2+y^2)\cdot(y-a)^2=k^2y^2$$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-verstehen.de Folie 35

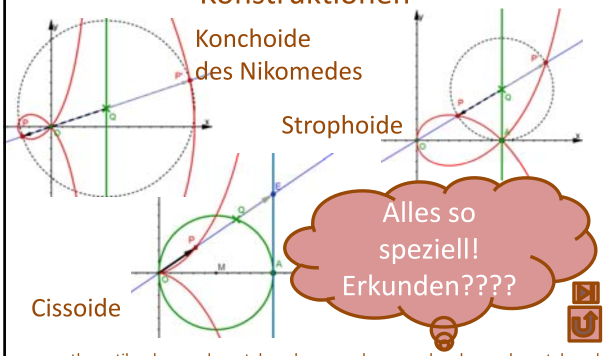
Allgemeine Definitionen

Referenz vor allem das Buch von
E.H. Lockwood
A Book of Curves
1961, nur in Bib. oder antiquarisch

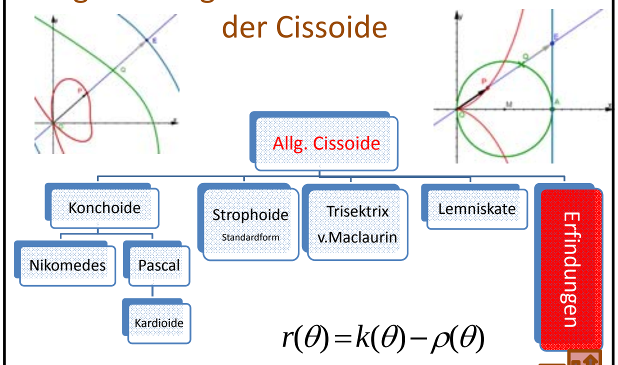
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-verstehen.de Folie 36

Kurven aus geometrischen Konstruktionen

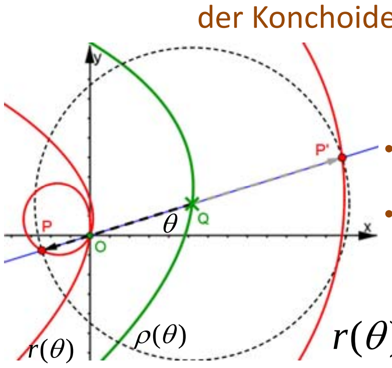


Allgemeine geometrische Konstruktion der Cissoide



$$r(\theta)=k(\theta)-\rho(\theta)$$

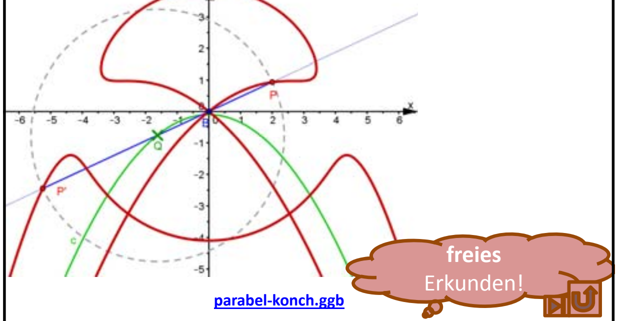
Allgemeine geometrische Konstruktion der Konchoide



- Wanderkurve für Q beliebig
- Auf Fahrstrahl Leinenlänge k markieren

$$r(\theta)=\rho(\theta)\pm k$$

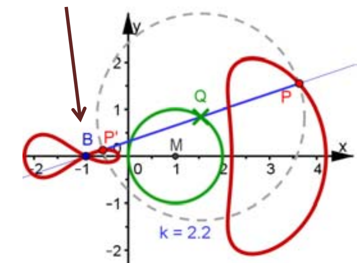
allgemeinere Konchoiden mit Parabel-Wanderwegen



parabel-konch.ggb

allgemeinere Konchoiden mit anderen Wanderwegen

den Pol an andere Stelle legen

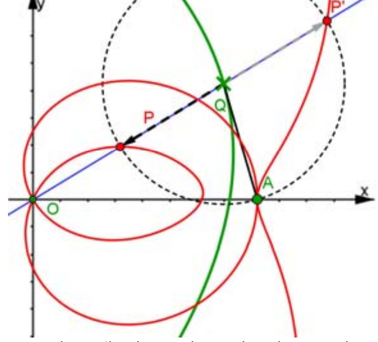


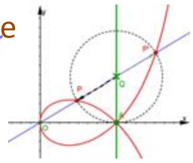
Konchoid_Kreis_pascal.ggb

Nicht bloß angucken, sondern nachdenken: Warum hat man alle Fälle betrachtet, wenn B von +2 nach links rückt und man sonst nur k variiert?

freies Erkunden!

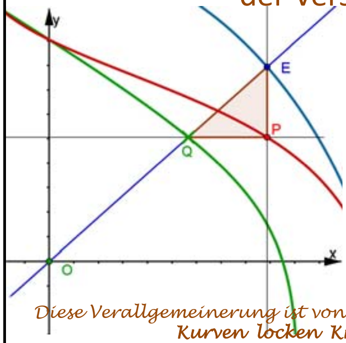
Allgemeine geometrische Konstruktion der Strophoide





- Wanderkurve für Q beliebig
- Kreis[Q,A]
- Auf Fahrstrahl P und P'

Allgemeine geometrische Konstruktion der Versiera

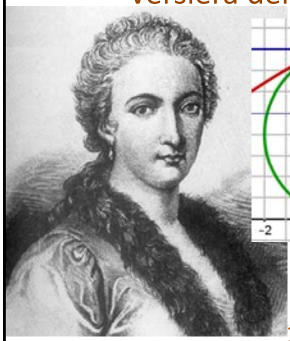


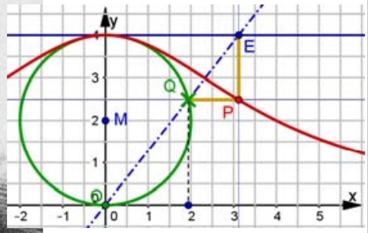
- Wanderkurve C_1 für Q beliebig
- Zweite Kurve C_2
- Fahrstrahl schneidet C_2 in E
- P=(x(E),y(Q))

P hat also die Abszisse von E und die Ordinate von Q

Diese Verallgemeinerung ist von mir, aber so ist es eben: Kurven locken Kreativität

Kurven aus geometrischen Konstruktionen Versiera der Maria Agnesi 1748



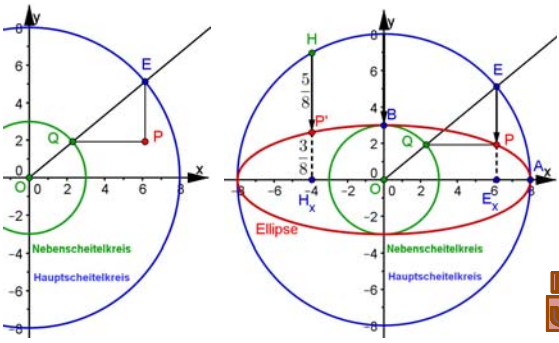


$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

Tipp: solche „Rasterkonstruktionen“ sind klausurfähig.

1718-1799

Ellipse aus der Scheitelkreise-Konstruktion



Die allgemeine Versiera verknüpft Geometrie und Analysis

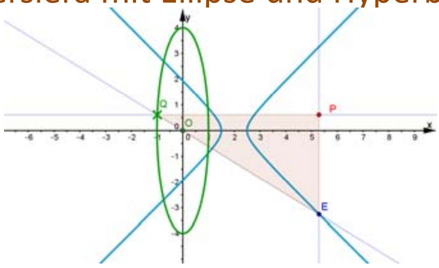
Satz 3.8 (Gleichungen für die allgemeine Versiera)

Implizite Gleichungen (möglichst ohne Bruchterme) für einige wichtige Fälle

C_1	C_2	*allgemeine Versiera*
$y = f(x)$	$y = k(x)$	$y = f\left(\frac{x\,y}{k(x)}\right)$
Parabel $y = m\,x^2 - a$	$y = k(x)$	$(y+a)k(x)^2 = mx^2y^2$
$F(x,y) = 0$	$y = k(x)$	$F\left(\frac{x\,y}{k(x)}, y\right) = 0$
Kreis $x^2 + (y-a)^2 = a^2$	$y = k(x)$	$x^2y = k(x)^2(2a - y)$
$F(x,y) = 0$	$K(x,y) = 0$	*Aus* $F(u,y)$, $K(x,t)$, $xy = ut$ *u und t eliminieren*

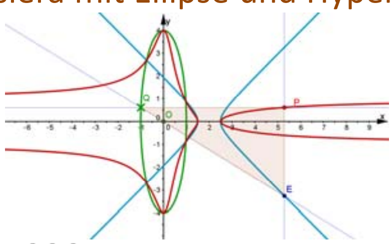
Vieles geht in GeoGebra-CAS, TI Nspire CAS o.Ä.
Elimination geht (für jeden) mit Wolfram-Alpha

Versiera mit Ellipse und Hyperbel



versiera-elli-hyp.ggb

Versiera mit Ellipse und Hyperbel



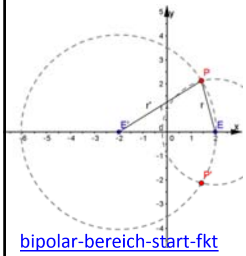
Result:

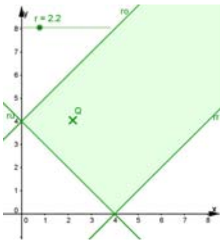
$$s^2\left(y^2 - b^2\right) = \frac{b^2\,x^2\,y^2}{a^2} - 4\,a^2\,b^2 + 4\,a^2\,y^2 + 4\,a\,b^2\,x - 4\,a\,x\,y^2 - b^2\,x^2 + x^2\,y^2 \bigwedge a \neq 0 \bigwedge b \neq 0$$

versiera-elli-hyp.ggb

s^2 (y^2 - b^2) =
(b^2 x^2 y^2)/a^2 - 4 a^2 b^2 + 4 a^2 y^2 +
4 a b^2 x - 4 a x y^2 - b^2 x^2 + x^2 y^2 && a != 0 && b != 0

Allgemeine bipolare Kurven



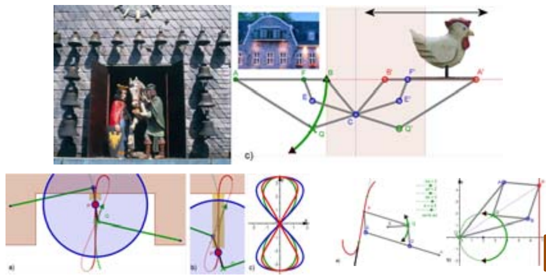


Visualisierung der Dreiecksbedingung im zweiten Grafikfenster in GeoGebra. **gekoppelte Darstellung**

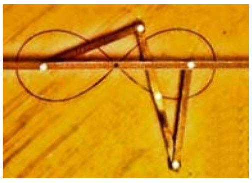
bipolar-bereich-start-fkt

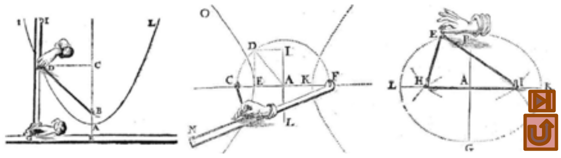
Ein Punkt P habe die Abstände r und r‘ von zwei „Brennpunkten“ E und E‘ im Abstand 2e. **Jede Gleichung** von r und r‘ **definiert eine bipolare Kurve** als Menge aller Punkte, die sowohl die Gleichung erfüllen, als auch mit E und E‘ eine Dreieck bilden.

Gelenke

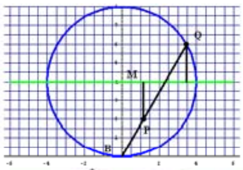


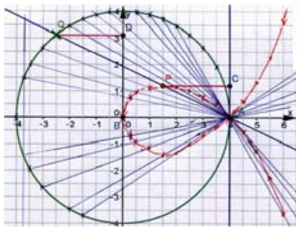
Starten mit Handeln

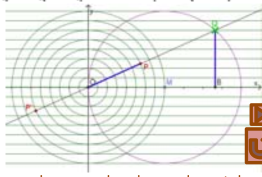




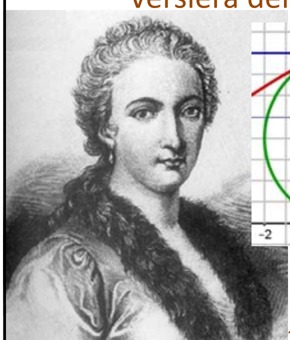
Raster-Konstruktionen



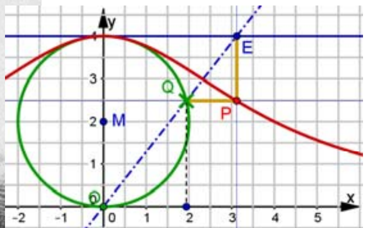




Kurven aus geometrischen Konstruktionen
Versiera der Maria Agnesi 1748



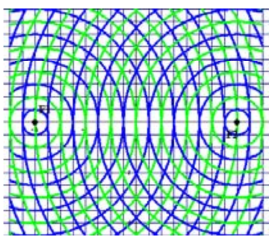
1718-1799



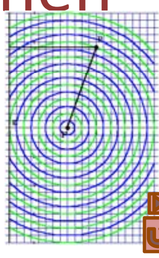
$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

Tipp: solche „Rasterkonstruktionen“ sind klausurfähig.

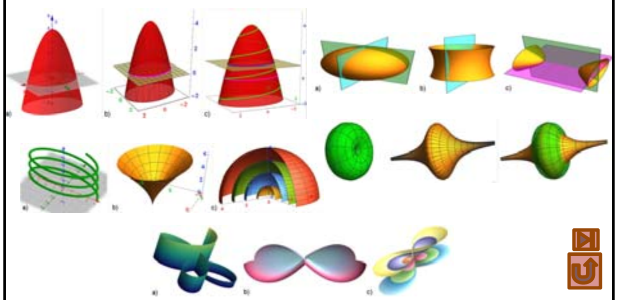
Raster-Konstruktionen



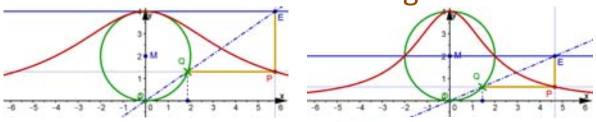
Kegelschnitte

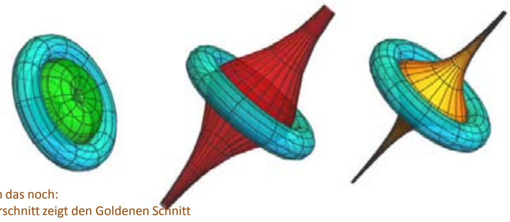


3D-Raum



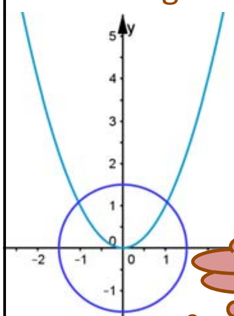
Kurven aus geometrischen Konstruktionen Versiera der Maria Agnesi





Auch das noch:
Querschnitt zeigt den Goldenen Schnitt

Kurvengleichung F(x,y)=0 und 3D



$$(y-x^2-a)(x^2+y^2-r^2)=0$$

Der Graph der Produktkurve ist die Vereinigung der Punkte der Faktorkurven.

$$(y-x^2-a)(x^2+y^2-r^2)=h$$

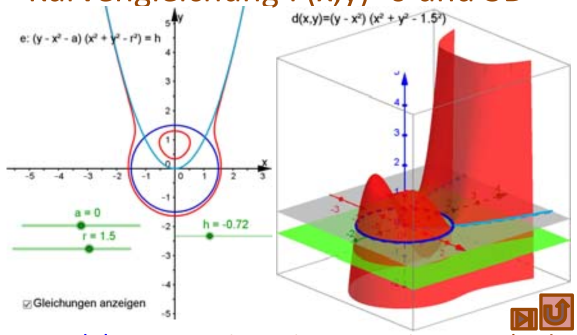
Wenn hier keine 0 steht?

Dann hilft die 3D-Darstellung beim Verstehen

produkt-ohne3D

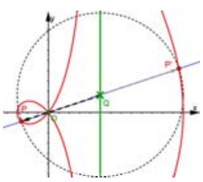
$$z=f(x,y)=(y-x^2-a)(x^2+y^2-r^2)=0$$

Kurvengleichung F(x,y)=0 und 3D

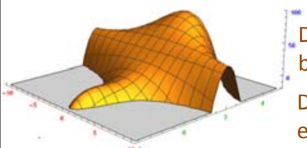


produkt3D Mit zwei Fenstern in GeoGebra!

3D-Darstellungen anderer Kurven

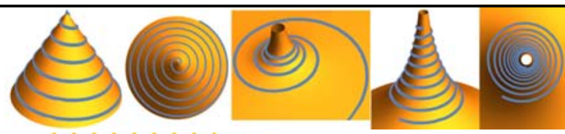


Konchoide



Durch Schnitte in anderer Höhe bilden sich Kurvenfamilien.

Doch manchmal kommt es anders als man denkt.



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!